ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE MARSEILLE

CONCOURS 1984

OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

L'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs est noté $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$; pour tout x appartenant à $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ et tout entier relatif n, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{x+n}$$

et, si p et q sont deux entiers relatifs tels que $p \leqslant q$, on désigne par $S_{p,q}(x)$ la fonction

$$\sum_{n=p}^{n=q} u_n(x)$$

1° Soit A un nombre réel positif ou nul; montrer que, si $|x| \leqslant A$ et $n \geqslant 2A$, alors

$$|u_{-n}(x) + u_n(x)| \leqslant \frac{4A}{n^2}$$

et en déduire que la suite de terme général $S_{-n,n}(x)$ est convergente. On notera $f(x)$ sa limite.

2° Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ (on pourra, par exemple, majorer la quantité $|S_{-n,n}(x_0+h) - S_{-n,n}(x_0)|$, indépendamment de n, par une fonction $M(h)$ qui tende vers 0 avec h).

3° *a*. Si p et q sont des entiers relatifs fixés, est-ce que $S_{-n+p,\,n+q}(x)$ tend vers $f(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

b. Montrer que la fonction f est impaire.

4° Établir que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, on a les relations

$$f(x+1) = f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$$

5° Démontrer que la fonction $d(x) = \pi \operatorname{cotg} \pi x - f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et en déduire qu'elle est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, qu'on notera encore $d(x)$.

6° La fonction $d(x)$ vérifie-t-elle les deux propriétés établies au 4° pour f ?

7° Soit M la borne supérieure de la fonction $d(x)$ sur le segment $[0, 1]$; on note E l'ensemble des nombres t appartenant à ce segment, tels que $d(t) = M$.

Prouver que, si t est élément de E, $\frac{t}{2}$ l'est également.

En déduire que la fonction $d(x)$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

8° A l'aide des résultats précédents, calculer la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

9° Pour tout réel x et tout entier naturel non nul m, on pose

$$P_m(x) = \pi x(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{x^2}{m^2}\right).$$

Prouver que la fonction $q_m(x) = \dfrac{P_m(x)}{\sin \pi x}$ est prolongeable en une fonction continue et positive ou nulle sur le segment $[0, m]$.

P 154

10° Établir que, si x vérifie la relation $0 < x < \frac{m}{2}$, alors on a

$$0 \leqslant \frac{q'_m(x)}{q_m(x)} \leqslant \frac{4x}{m}$$

(on pourra utiliser la méthode de la question 1°).

11° Démontrer que, pour tout réel x, la suite de terme général $P_m(x)$ tend vers $\sin \pi x$.

12° Pour quelles valeurs du réel a l'intégrale impropre

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} at}{e^t - 1}\, dt$$

est-elle convergente? Prouver que, pour ces valeurs de a, $F(a)$ est somme de la série

$$a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$$

(On demande une démonstration directe de ce résultat et non l'application d'un théorème.)

En déduire la valeur de $F(a)$.